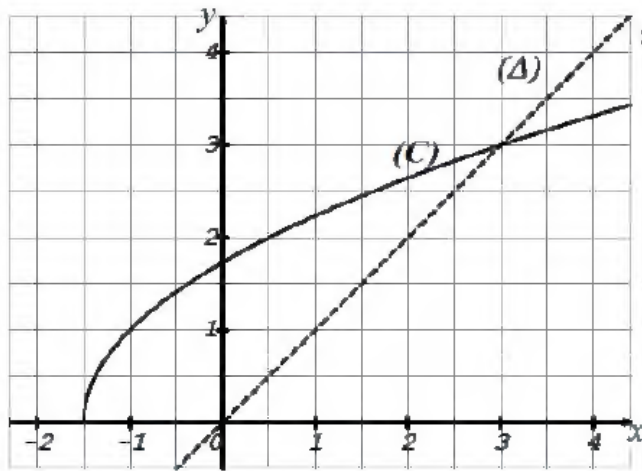


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.



(1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كما يلي:

$$h(x) = \sqrt{2x+3} \quad (C) \text{ تمثيلها البياني و } (\Delta)$$

المستقيم ذو معادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

(أ) - أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على

محور القواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .

(دون حسابها و موضحا خطوط الإنشاء).

(ب) - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) و تقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(3) (أ) - ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(ب) - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

(حيث $z \neq 2-3i$).

- حل في \mathbb{C} هذه المعادلة.

(2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. A و B نقطتان لاحتقائهما على

الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$.

- تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

(3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحتقتها z ، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحتقتها z' حيث:

$$z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$$

النقط C, D, E لواحقتها على الترتيب: $z_C = -2i$, $z_D = 2-3i$ و $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين DM و CM .

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

النمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة:
 $14x + 16y + 13z - 47 = 0$ ، و النقط $A(1; -2; 5)$ ، $B(2; 2; -1)$ ، $C(-1; 3; 1)$.
 1) أ- تحقق أن النقط A ، B و C ليست في استقامة.

ب- بيّن أن المستوي (ABC) هو (P) .

2) جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

3) أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1; -2; \frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q) .

ج- احسب المسافة بين النقطة D و المستقيم (AB) .

النمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي: $f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5 < \alpha < -3,4$ و $-1,1 < \beta < -1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6 \ln \frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6 \ln(1-x)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$.

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.

(2) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أن (u_n) متزايدة تماماً.

(3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

(4) (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = \ln(u_n - 3)$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدّها الأول.

(ب) اكتب كلاً من u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$.

اكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; 0; 1)$ ،

$B(2; 1; 0)$ و $C(1; -1; 0)$.

(1) بيّن أن النقط A ، B و C تُعيّن مستويًا.

(2) بيّن أن $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(3) $D(2; -1; 3)$ و $H\left(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6}\right)$ نقطتان من الفضاء حيث:

أ- تحقّق أن النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

ب- بيّن أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

ج- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلًا وسيطياً لتقاطعهما.

التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

(1) $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

أ- تحقّق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة $P(z) = 0$.

- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.
 أ- اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
 ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.
 ج- استنتج طبيعة المثلث ABC .

- (3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
 أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S .
 ب- عيّن z_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .
 ج- بيّن أنّ النقط A, B, A' في استقامة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) لتكن g الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 - x e^x$.

- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 (2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.
 (3) أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[-1; +\infty[$.
 ب- تحقق أنّ $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$.

- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.
 استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

(3) بيّن أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$. (تدوّر النتائج إلى 10^{-2}) .

(4) أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
 ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(5) أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $-1,5 < x_1 < -1,6$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.
 ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .

(6) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $h(x) = (ax + b)e^x$.

- أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^x$ على \mathbb{R} .
 ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R} .